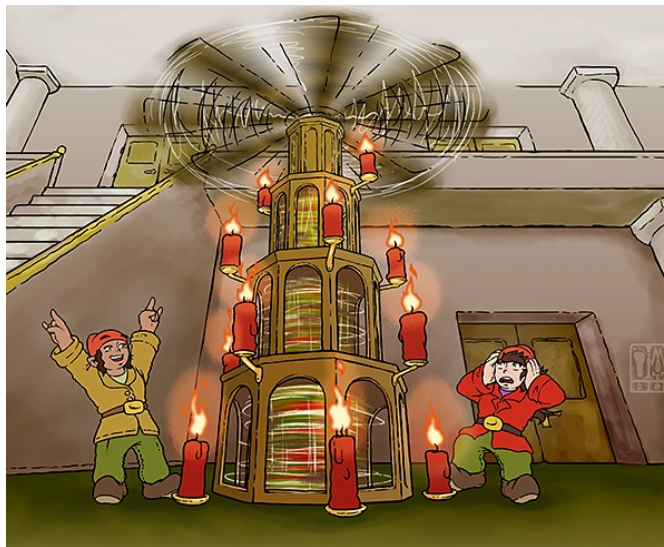


Verwaltungswichtel Fatima liebt Weihnachten – spätestens ab Mitte Dezember hält sie die Vorfreude kaum noch aus. Sie möchte auch ihren Arbeitsplatz so weihnachtlich wie möglich gestalten. Deshalb geht sie zur Leiterin der Wichtelverwaltung, Pascaline, und schlägt ihr ein neues Weihnachtsritual vor.

Fatima erklärt ihre Idee: „Wir wählen uns einen Tag im Dezember aus. An diesem Tag stellen wir in der Eingangshalle des Rathauses eine große Weihnachtspyramide auf. Auf der Pyramide stehen so viele Kerzen, wie zu Beginn noch Tage bis zum 24. sind. Die zünde ich jeden Morgen um 8 Uhr an und um 16 Uhr, wenn ich nach Hause gehe, lösche ich sie wieder. Am 1. Tag zünde ich alle Kerzen an und dann jeden Tag immer eine Kerze weniger – bis am 24. Dezember nur noch eine Kerze brennt.“

Pascaline gefällt die Idee: „Das finde ich schön. Wir zählen damit von dem Tag, an dem die Pyramide aufgestellt wird, die Tage bis Weihnachten herunter.“ Doch Pascaline denkt weiter: „Diese Pyramide braucht große Kerzen. Kannst du jeden Tag die Kerzen, die du anzündest, so auswählen, dass sie am Abend des 24. Dezember alle gleich weit abgebrannt sind? Dann können wir sie im nächsten Jahr weiter benutzen.“



„Gute Frage“, denkt sich Fatima und beginnt zu überlegen. „Das hängt sicher davon ab, wie viele Tage vor Weihnachten die Pyramide aufgestellt wird. Für 1 Tag mit einer Kerze geht es logischerweise. Für 2 Tage mit zwei Kerzen geht es aber nicht, denn am ersten Tag brennen beide Kerzen für 8 Stunden und am zweiten brennt eine der beiden noch einmal so lange. Bei 3 Tagen geht es wieder: Am ersten Tag brennen alle 3, am zweiten Tag brennen 2 und am dritten Tag brennt die Kerze, die am zweiten Tag nicht gebrannt hat. Für 4 Tage mit vier Kerzen auf der Pyramide geht es aber wieder nicht...“

Wie viele Kerzen (= Tage) muss die Pyramide haben, damit durch geschickte Auswahl am Ende alle Kerzen gleich lange gebrannt haben? Nur eine der vier Aussagen ist richtig.

[**Hinweis:** Alle Kerzen sind groß genug, dass sie auf jeden Fall die gewünschte Zeit brennen können. In 8 Stunden brennen sie gleich weit ab. Auch am 24.12. arbeiten die Verwaltungswichtel 8 Stunden lang.]

- Es funktioniert nur mit 3 Kerzen (= 3 Tagen).
- Es funktioniert für jede ungerade Anzahl an Kerzen (= Tagen).
- Es funktioniert nur, wenn die Anzahl der Kerzen bzw. Tage durch 3 teilbar ist.
- Es funktioniert nur, wenn die Anzahl der Kerzen bzw. Tage eine Primzahl ist.

**Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:**

Lars Empacher

Mathematikinteressierter Vater aus Kornwestheim (Baden-Württemberg)

## Lösung

**Antwortmöglichkeit b) ist richtig: Das funktioniert für jede ungerade Anzahl an Kerzen (Tagen).**

### 1. Lösungsweg: Ausschlussverfahren

Am besten findest du die richtige Aussage, indem du alle Aussagen der Antwortmöglichkeiten einzeln überprüfst. Mit einem Gegenbeispiel kannst du zeigen, dass eine Aussage falsch ist. Du weißt bereits, dass es für die 1 und die 3 funktioniert, für die 2 und die 4 aber nicht.

#### Überprüfung der Antwortmöglichkeiten a) und c):

Die Antwortmöglichkeit a) kannst du schnell ausschließen, denn in der Aufgabe steht bereits, dass es für die 1 funktioniert. Auch Antwortmöglichkeit c) kannst du damit ausschließen, denn die 1 ist nicht durch 3 teilbar.

Das siehst du vielleicht nicht sofort. Deshalb kannst du auch versuchen eine weitere Zahl zu finden, die nicht durch 3 teilbar ist. Wenn du für diese Zahl zeigst, dass am Abend des 24. Dezember alle Kerzen gleich heruntergebrannt sind, hast du gleich beide Antwortmöglichkeiten widerlegt.

Die nächste Zahl, die noch nicht überprüft wurde, ist die 5. Sie ist nicht durch 3 teilbar. Für die Überprüfung kannst du eine übersichtliche Tabelle erstellen. Immer dann, wenn eine Kerze angezündet wird, trägst du ein Kreuz in das entsprechende Feld in der Tabelle ein.

Am ersten Tag werden alle 5 Kerzen angezündet, weil es noch fünf Tage bis Weihnachten sind. Am zweiten Tag werden 4 Kerzen angezündet, und so weiter... Die Tabelle kann folgendermaßen aussehen:

	Kerze 1	Kerze 2	Kerze 3	Kerze 4	Kerze 5
Tag 1	x	x	x	x	x
Tag 2	x	x	x	x	
Tag 3	x	x	x		
Tag 4				x	x
Tag 5					x
Brenndauer in Tagen	3	3	3	3	3

Du siehst, es gibt eine Möglichkeit die Kerzen so anzuzünden, dass in fünf Tagen jede der 5 Kerzen genau drei Tage brennt. Damit hast du eine Lösung mit 5 Kerzen gefunden! Sie zeigt, dass die Anzahl der Kerzen nicht unbedingt durch 3 teilbar sein muss. Die Aussagen a) und c) sind daher falsch.

#### Überprüfung der Antwortmöglichkeit d):

Du weißt jetzt, dass es entweder für alle ungeraden Zahlen oder für Primzahlen funktioniert. Eine Primzahl ist eine Zahl, die nur durch 1 und sich selbst teilbar ist. Das sind zum Beispiel die 2, 3, 5, 7, 11 und noch (unendlich) viele mehr. In der Aufgabe steht bereits, dass es für die 2 nicht funktioniert. Es funktioniert also nicht für alle Primzahlen.

Um die Antwortmöglichkeit d) nun sicher ausschließen zu können, musst du noch eine Zahl untersuchen, die ungerade aber keine Primzahl ist. Die kleinste ungerade Zahl, die keine Primzahl ist, ist die 9, denn  $9 = 3 \cdot 3$ . Du kannst wieder mithilfe einer Tabelle untersuchen, ob es möglich ist, dass alle 9 Kerzen in neun Tagen gleich viele Tage angezündet werden.

Am ersten Tag werden alle 9 Kerzen angezündet. Am zweiten Tag werden 8 Kerzen angezündet und so weiter. Die Tabelle kann folgendermaßen aussehen:

	Kerze 1	Kerze 2	Kerze 3	Kerze 4	Kerze 5	Kerze 6	Kerze 7	Kerze 8	Kerze 9
Tag 1	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Tag 2	x	x	x	x	x	x	x	x	
Tag 3	x	x	x	x	x	x	x		
Tag 4	x	x	x	x	x	x			
Tag 5	x	x	x	x	x				
Tag 6						x	x	x	x
Tag 7							x	x	x
Tag 8								x	x
Tag 9									x
Brenndauer in Tagen	5	5	5	5	5	5	5	5	5

Du siehst, es gibt eine Möglichkeit die Kerzen so anzuzünden, dass in neun Tagen jede der 9 Kerzen genau fünf Mal brennt. Damit hast du eine Lösung mit 9 Kerzen gefunden! Sie zeigt, dass es nicht nur für Primzahlen funktioniert. Die Aussage d) ist daher ebenfalls falsch.

Die richtige Antwort ist damit Antwortmöglichkeit b): Es funktioniert für jede ungerade Anzahl an Kerzen.

## 2. Lösungsweg: Logisches Argumentieren

Du kannst für jeden Anfangstag berechnen, wie oft die Kerzen insgesamt brennen. Diese Anzahl muss ein Vielfaches der Anzahl an Tagen (= Kerzen auf der Pyramide) sein, damit alle Kerzen am Ende gleich weit abgebrannt sein können.

Sind es beispielsweise noch 9 Tage bis zum Weihnachtsfest, brennen die Kerzen über die Tage verteilt insgesamt  $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$  Mal. Da 45 durch 9 teilbar ist, geht es auf: Jede Kerze kann genau  $45 : 9 = 5$  Mal angezündet werden.

Doch warum ist das so? Bei ungerader Anzahl an Tagen kannst du die Anzahl der an den verschiedenen Tagen brennenden Kerzen sinnvoll paaren. Wenn die Summe eines Pärchens gleich der Anzahl an Tagen ist, entsteht insgesamt ein Vielfaches der Kerzenanzahl. Für unser Beispiel mit 9 Tagen geht das so:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\
 & & & & 9 & & & & & \\
 & & & & 8+1=9 & & & & & \\
 & & & & 7+2=9 & & & & & \\
 & & & & 6+3=9 & & & & & \\
 & & & & 5+4=9 & & & & & \\
 & & & & & & & & & 5 \cdot 9 = 45
 \end{array}$$

Genauso geht es auch bei jeder anderen ungeraden Zahl an Tagen. Versuche es selbst mit anderen Beispielen!

Bei geraden Zahlen an Kerzen, z.B. 6, bleibt beim Paaren der Zahlen die Zahl in der Mitte (die Hälfte der gewählten Zahl) übrig. Es geht von daher nicht auf!

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 & & & & & 6 \\
 & & & & & 5+1=6 \\
 & & & & & 2+4=6 \\
 & & & & & 3 \\
 & & & & & 3 \cdot 6 + 3
 \end{array}$$

Die richtige Antwort ist deshalb die Aussage b): Es funktioniert für jede ungerade Anzahl an Kerzen bzw. Tagen.